# Análise Matemática IV

## Problemas para as Aulas Práticas

6 de Junho de 2005

**Semana 9**

1. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Determine $e^{t\mathbf{A}}$ e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

**Resolução:**

Os valores próprios de $\mathbf{A}$ são as soluções da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0 \;\Leftrightarrow\; \Big((5-\lambda)(3-\lambda)+1\Big)(4-\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 4$$

Para calcular o(s) vector(es) próprio(s) associados, há que determinar $\mathbf{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$(\mathbf{A} - 4I)\mathbf{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; a - b = 0$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a,b,c) = (a,a,c) = (a,a,0) + (0,0,c) = a(1,1,0) + c(0,0,1)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_1} = (1,1,0) \qquad , \qquad \mathbf{v_2} = (0,0,1)$$

Concluimos que a matriz $\mathbf{A}$ não é diagonalizável, mas é semelhante a uma matriz de Jordan com dois blocos, isto é

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\,\mathbf{J}\,\mathbf{S}^{-1}$$

em que, por exemplo

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_g} & \mathbf{v_2} \end{bmatrix}$$

em que $\mathbf{v_g}$ é um vector próprio generalizado. É então solução da equação

$$(\mathbf{A} - 4I)\mathbf{v} = \mathbf{v_1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a - b = 1$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v_g} = (a, b, c) = (1 + b, b, c) = (1, 0, 0) + (b, b, 0) + (0, 0, c) = (1, 0, 0) + b(1, 1, 0) + c(0, 0, 1)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_g} = (1, 0, 0)$$

Tem-se então que

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{SJS^{-1}}} = \mathbf{S}e^{t\mathbf{J}}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} e^{4t} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{4t} \begin{bmatrix} t+1 & -t & 0 \\ t & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim sendo, a solução do PVI, $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-1)}\mathbf{x}(1) = e^{4(t-1)} \begin{bmatrix} t & -(t-1) & 0 \\ t-1 & 1-(t-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{4(t-1)} \begin{bmatrix} t \\ t-1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

**Resolução:**

Visto $\mathbf{A}$ ser uma matriz triangular, os seus valores próprios são os elementos da sua diagonal principal, ou seja

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1$$

Para calcular o vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$, há que determinar $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tal que

$$(\mathbf{A} - 2I)\mathbf{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; b = c = 0$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = (a, 0, 0) = a(1, 0, 0)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_1} = (1, 0, 0)$$

Para calcular o vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 0$, há que determinar $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tal que

$$(\mathbf{A} - 0I)\mathbf{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; a = b \text{ e } c = 0$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = (a, a, 0) = a(1, 1, 0)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_2} = (1, 1, 0)$$

Para calcular o vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$, há que determinar $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tal que

$$(\mathbf{A} - I)\mathbf{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; b = c \text{ e } a = 0$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = (0, b, b) = b(0, 1, 1)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_3} = (0, 1, 1)$$

Concluimos que a matriz $\mathbf{A}$ é diagonalizável, ou seja

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\,\mathbf{D}\,\mathbf{S}^{-1}$$

em que,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{SDS^{-1}}} = \mathbf{S}e^{t\mathbf{D}}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{0t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{2t}+1 & e^{2t}-1 \\ 0 & 1 & e^{t}-1 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

Assim sendo, a solução do PVI, $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-0)}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{2t}+1 & e^{2t}-1 \\ 0 & 1 & e^{t}-1 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

**Resolução:**

Os valores próprios de $\mathbf{A}$ são as soluções da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0 \iff (2-\lambda)^2(3-\lambda) = 0 \iff \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 3$$

Para calcular o vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$, há que determinar $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tal que

$$(\mathbf{A} - 2I)\mathbf{v} = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = c \text{ e } b = 0$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = (a, 0, a) = a(1, 0, 1)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_1} = (1, 0, 1)$$

Para calcular o vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 3$, há que determinar $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tal que

$$(\mathbf{A} - 3I)\mathbf{v} = 0 \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = b = 0$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = (0, 0, c) = c(0, 0, 1)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_2} = (0, 0, 1)$$

Concluimos que a matriz $\mathbf{A}$ não é diagonalizável mas é semelhante a uma matriz de Jordan com 2 blocos (o número de vectores próprios linearmente independentes), ou seja

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\,\mathbf{J}\,\mathbf{S^{-1}}$$

em que, por exemplo,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_1^g} & \mathbf{v_2} \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ são os vectores próprios atrás calculados e $\mathbf{v_1^g}$ é um vector próprio generalizado correspondente ao valor próprio $\lambda = 2$. Para o calcular há que determinar $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tal que

$$(\mathbf{A} - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{v_1} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; c = a + 1 \;\text{ e }\; b = 1$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a, b, c) = (a, 1, a + 1) = a(1, 0, 1) + (0, 1, 1)$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_1^g} = (0, 1, 1)$$

Tem-se então que

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{SJS^{-1}}} = \mathbf{S}e^{t\mathbf{J}}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ e^{2t} - e^{3t} & (t+1)e^{2t} - e^{3t} & e^{3t} \end{bmatrix}$$

Assim sendo, a solução do PVI, $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-0)}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ e^{2t} - e^{3t} & (t+1)e^{2t} - e^{3t} & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}(t+1) \\ e^{2t} \\ (t+2)e^{2t} - e^{3t} \end{bmatrix}$$

4. Determine a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = 14x - 10y + 1 \\ y' = 10x - 2y + 2 \end{cases}$$

**Sugestão:** Determine primeiro uma solução particular constante.

**Resolução:**

Escrevendo o sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 14 & -10 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{AX} + \mathbf{C}(t) \tag{1}$$

Dado que a equação é linear, uma sua solução será da forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{X_h} + \mathbf{X_p}$$

em que $\mathbf{X_h}$ é a solução geral do problema homogéneo associado $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, e $\mathbf{X_p}$ é uma solução particular da equação $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{C}$. Seguindo a sugestão, vamos procurar uma solução particular constante, ou seja, vamos procurar $\mathbf{X_p} = (c_1, c_2)$ que verifique a equação (1), isto é

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 14 & -10 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 14c_1 - 10c_2 + 1 = 0 \\ 10c_1 - 2c_2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (c_1, c_2) = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$$

pelo que $\mathbf{X_p} = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$. De seguida calcularemos $\mathbf{X_h}$, que como já sabemos envolve o cálculo da matriz $e^{t\mathbf{A}}$. Os valores próprios de $\mathbf{A}$ são as soluções da equação

$$\det[\mathbf{A} - \lambda I] = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 12\lambda + 72 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 6 \pm 6i$$

Para calcular o vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 6 + 6i$, há que determinar $\mathbf{v} = (a, b) \neq (0, 0)$ tal que

$$(\mathbf{A} - (6 + 6i)I)\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 - 6i & -10 \\ 10 & -8 - 6i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow b = \frac{4 - 3i}{5}a$$

Tem-se então que

$$\mathbf{v} = (a, b) = (a, \frac{4 - 3i}{5}a) = a(1, \frac{4 - 3i}{5})$$

donde podemos escolher

$$\mathbf{v_1} = (1, \frac{4 - 3i}{5})$$

e como consequência, o vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 6 - 6i$ será

$$\mathbf{v_2} = \overline{(1, \frac{4 - 3i}{5})} = (1, \frac{4 + 3i}{5})$$

Tem-se então, que $\mathbf{A}$ é uma matriz diagonalizável, isto é

$$\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$$

em que

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6+6i & 0 \\ 0 & 6-6i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{4-3i}{5} & \frac{4+3i}{5} \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\mathbf{S}^{-1} = -\frac{i}{6} \begin{bmatrix} 4+3i & -5 \\ -4+3i & 5 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= \mathbf{S}e^{t\mathbf{D}}\mathbf{S}^{-1} \\ &= -\frac{i}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{4-3i}{5} & \frac{4+3i}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(6+6i)t} & 0 \\ 0 & e^{(6-6i)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4+3i & -5 \\ -4+3i & 5 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{ie^{6t}}{30} \begin{bmatrix} 5\Big(4(e^{6it}-e^{-6it})+3i(e^{6it}+e^{-6it})\Big) & 25(-e^{6it}+e^{-6it}) \\ 25(e^{6it}-e^{-6it}) & 5\Big(4(-e^{6it}+e^{-6it})+3i(e^{6it}+e^{-6it}) \end{bmatrix} \\ &= \frac{e^{6t}}{3} \begin{bmatrix} 4\operatorname{sen}(6t)+3\cos(6t) & -5\operatorname{sen}(6t) \\ 5\operatorname{sen}(6t) & -4\operatorname{sen}(6t)+3\cos(6t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Temos então que

$$\mathbf{X_h} = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{K} = \frac{e^{6t}}{3} \begin{bmatrix} 4\operatorname{sen}(6t)+3\cos(6t) & -5\operatorname{sen}(6t) \\ 5\operatorname{sen}(6t) & -4\operatorname{sen}(6t)+3\cos(6t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

e por fim a solução pedida é

$$\mathbf{X} = \mathbf{X_h} + \mathbf{X_p} = \frac{e^{6t}}{3} \begin{bmatrix} 4\operatorname{sen}(6t)+3\cos(6t) & -5\operatorname{sen}(6t) \\ 5\operatorname{sen}(6t) & -4\operatorname{sen}(6t)+3\cos(6t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

para $k_1,\ k_2 \in \mathbb{R}$.

5. Considere a seguinte matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule $e^{\mathbf{A}t}$.

**Resolução:**

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

(b) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{y}(1) = (1,1,1)^T \end{cases}$$

onde $\mathbf{h}(\mathbf{t}) = (0, 2e^t, e^t)^T$.

**Resolução:**
A solução geral da equação homogénea é dada por $\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\mathbf{y} = 0$

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Para determinar uma solução particular da equação basta determinar soluções particulares das equações

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 - y_1 - y_2 &= 0 \\ \dot{y}_2 - y_2 &= 2e^t \\ \dot{y}_3 - y_3 &= e^t. \end{aligned}$$

Segue-se que

$$y_2(t) = Ate^t \quad \text{e} \quad y_3(t) = Bte^t.$$

Para determinar $A$ e $B$ tem-se

$$\dot{y}_2 - y_2 = 2e^t \quad \Rightarrow \quad Ae^t + Ate^t - Ate^t = 2e^t \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

e

$$\dot{y}_3 - y_3 = e^t \quad \Rightarrow \quad Be^t + Bte^t - Bte^t = e^t \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

Substituindo $y_2 = 2te^t$ na primeira equação, obtém-se:

$$\dot{y}_1 - y_1 = 2te^t$$

Procedendo como anteriormente, resulta que $y_1(t) = t^2e^t$ é uma solução da equação acima. Logo uma solução particular é:

$$\mathbf{y}_P(t) = \begin{bmatrix} t^2e^t \\ 2te^t \\ te^t \end{bmatrix}.$$

Aplicando a condição inicial, obtém-se

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}(t-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2e \\ 1-e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2e^t \\ 2te^t \\ te^t \end{bmatrix}.$$

**Nota:** O problema tambem pode ser resolvido usando a fórmula da variação das constantes.

6. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \\ \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(i) Determine a solução geral da equação homogénea.

(ii) Sendo $\mathbf{y}(t) = [y_1(t)\ y_2(t)\ y_3(t)\ y_4(t)]^T$ a solução do problema não homogéneo, determine $y_2(3)$.

**Resolução:**

**(i)** Visto a matriz $\mathbf{A}$ ser da forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A_1} & 0 \\ 0 & \mathbf{A_2} \end{bmatrix} \quad \text{sendo} \quad \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

temos que

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{A_1}t} & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{A_2}t} \end{bmatrix}$$

o que facilita bastante os cálculos. Começemos por calcular $e^{\mathbf{A_1}t}$. O valor próprio de $\mathbf{A_1}$ é $-2$ associado aovector próprio $\mathbf{v_1} = (0,1)$ e ao vector próprio generalizado $\mathbf{v_1^g} = (\frac{1}{3}, 0)$. Sendo assim

$$\mathbf{A_1} = \mathbf{SJS}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

e consequentemente

$$e^{\mathbf{A_1}t} = \mathbf{S}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3t & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos agora calcular $e^{\mathbf{A_2}t}$. Os valores próprios de $\mathbf{A_2}$ são $1+2i$ e $1-2i$ associados (respectivamente) aos vectores próprios $\mathbf{v_1} = (1, i)$ e $\mathbf{v_2} = (1, -i)$. Sendo assim

$$\mathbf{A_2} = \mathbf{SDS}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix} \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}$$

e consequentemente

$$e^{\mathbf{A_2}t} = \mathbf{S}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{S}^{-1} = \frac{e^t}{2i} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2it} & 0 \\ 0 & e^{-2it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos(2t) & \operatorname{sen}(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{A_1}t} & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{A_2}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 3te^{-2t} & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t\cos(2t) & e^t\operatorname{sen}(2t) \\ 0 & 0 & -e^t\operatorname{sen}(2t) & e^t\cos(2t) \end{bmatrix}$$

e a solução geral do sistema homogéneo é dada por

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{A_1}t} & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{A_2}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 3te^{-2t} & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t\cos(2t) & e^t\operatorname{sen}(2t) \\ 0 & 0 & -e^t\operatorname{sen}(2t) & e^t\cos(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

**(ii)** Pela fórmula da variação das constantes, a solução do problema de valor inicial dado será

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{b}(s)\,ds \\
&= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ 3te^{-2t} & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t\cos(2t) & e^t\operatorname{sen}(2t) \\ 0 & 0 & -e^t\operatorname{sen}(2t) & e^t\cos(2t)\end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix}0\\2e^{2s}\\0\\0\end{bmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix}0\\1-e^{-2t}\\0\\0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

pelo que

$$y_2(3) = 1 - e^{-6}$$

7. (i) Determine a solução do sistema linear

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

que satisfaz a condição inicial $x(0) = y(0) + 1 = 1$.

(ii) Considerando agora o sistema

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \\ z' = y - (\operatorname{sen} t)z \end{cases}$$

utilize a alínea anterior para determinar a solução que verifica a condição inicial $x(0) = y(0) + 1 = z(0) = 1$.

**Resolução:**

**(i)** Escrevendo o sistema na forma matricial

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} \equiv \mathbf{Ax}$$

Os valores próprios de $\mathbf{A}$ são $i$ e $-i$ associados (respectivamente) aos vectores próprios $\mathbf{v_1} = (1, 1-i)$ e $\mathbf{v_2} = (1, 1+i)$. Sendo assim

$$\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ -1+i & 1 \end{bmatrix}$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{S}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{S}^{-1} \\ &= \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ -1+i & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t & -\operatorname{sen} t \\ 2\operatorname{sen} t & -\operatorname{sen} t + \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t \\ 2\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

**(ii)** Dado que nas duas primeiras equações não há dependência em $z$ podemos concluir de imediato por (i) que

$$x(t) = \operatorname{sen} t + \cos t \qquad \text{e} \qquad y(t) = 2\operatorname{sen} t$$

Falta então determinar $z$, ou seja resolver o PVI

$$z' = 2\operatorname{sen} t - (\operatorname{sen} t)z \quad , \quad z(0) = 1$$

Trata-se de uma equação linear, de factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int \operatorname{sen} t\, dt} = e^{-\cos t}$$

Então, a equação é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\cos t}z\right) = 2\operatorname{sen} t e^{-\cos t} \;\Leftrightarrow\; e^{-\cos t}z = 2e^{-\cos t} + c \;\Leftrightarrow\; z(t) = 2 + ce^{\cos t}$$

Dado que $z(0) = 1$, conclui-se

$$z(t) = 2 - e^{\cos t - 1}$$